インデックスに戻る

６．平面図形

６－１．三角形の性質

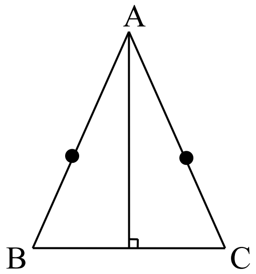
６－１－１．三角形の辺と角

６－１－１－１．辺と角の大小関係

三角形ABCにおいて

$\mathrm{BC} = a$、$\mathrm{CA} = b$、$\mathrm{AB} = c$

とする。



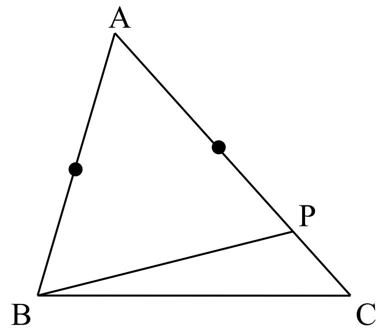
$b = c$　ならば　$\angle\mathrm{B} = \angle\mathrm{C}$

は二等辺三角形の性質として、すでに学んでいるだろう。$b > c$ や $b < c$ の場合には、以下のようになる。

三角形ABCにおいて、次のことが成り立つ。

$b > c$　ならば　$\angle\mathrm{B} > \angle\mathrm{C}$

［証明］



$b > c$ ならば、辺 CA 上に、 $\mathrm{AP} = \mathrm{AB}$ を満たす点 P をとることができる。

三角形 ABP は二等辺三角形であるから、

$\angle \mathrm{ABP} = \angle \mathrm{APB}$　…①

点 P は $\angle \mathrm{ABC}$ の内部にあるから

$\angle \mathrm{ABC} = \angle \mathrm{ABP} + \angle \mathrm{PBC}$　…②

三角形 BCP において、外角の性質より

$\angle \mathrm{APB} = \angle \mathrm{PCB} + \angle \mathrm{PBC}$　…③

②より

$\angle \mathrm{ABC} > \angle \mathrm{ABP}$　…④

③より

$\angle \mathrm{APB} > \angle \mathrm{PCB}$　…⑤

①④⑤より

$\angle \mathrm{ABC} > \angle \mathrm{ABP} = \angle \mathrm{APB} > \angle \mathrm{PCB}$

よって

$\angle \mathrm{ABC} > \angle \mathrm{ACB}$

$b < c$　ならば　$\angle \mathrm{B} < \angle \mathrm{C}$

は頂点の名前を読み替えることにより、明らかである（または、同様の証明をすることにより、示すことができる）。

したがって、

$b = c$　ならば　$\angle \mathrm{B} = \angle \mathrm{C}$

$b > c$　ならば　$\angle \mathrm{B} > \angle \mathrm{C}$

$b < c$　ならば　$\angle \mathrm{B} < \angle \mathrm{C}$

がいえる。

これらの命題の逆を考えよう。

$\angle B = \angle C$　ならば　$b = c$
は二等辺三角形であるための条件として、すでに学んでいるだろう。

次の命題を示そう。

三角形 ABC において
$\angle B > \angle C$　ならば　$b > c$

［証明］
$\angle B > \angle C$ のときに、$b > c$ でないと仮定する。$b > c$ でないから、$b = c$ または $b < c$ である。
$b = c$ ならば $\angle B = \angle C$ となり、$\angle B > \angle C$ に矛盾する。
$b < c$ ならば $\angle B < \angle C$ となり、$\angle B > \angle C$ に矛盾する。
よって、$\angle B > \angle C$ ならば $b > c$ である。

$\angle B < \angle C$　ならば　$b < c$
は頂点の名前を読み替えることにより、明らかである（または、同様の証明をすることにより、示すことができる）。

以上より、次のことが成り立つ。

三角形の辺と角の大小関係

三角形 ABC において
$b > c \iff \angle B > \angle C$
$b = c \iff \angle B = \angle C$
$b < c \iff \angle B < \angle C$

インデックスに戻る