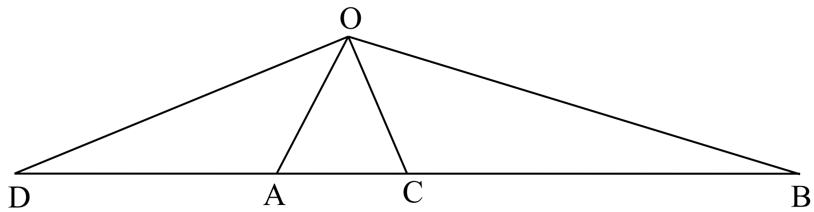
インデックスに戻る

１３．　平面ベクトル
１３－２．　ベクトルと平面図形
１３－２－３．　図形への応用
１３－２－３－２．内積の利用

内積を利用して、図形の性質を調べることができる。

（例）

三角形OABにおいて、$\mathrm{OA}=1$、$\mathrm{OB}=3$であるとする。辺ABを$1:3$に内分する点をC、辺ABを$1:3$に外分する点をDとする。このとき、$\mathrm{OC}\perp\mathrm{OD}$であることを示そう。



$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$、$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$とする。

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{1+3}=\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}、\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{-3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{1-3}=\frac{3}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$$

よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}&=\left(\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}\right)\cdot\left(\frac{3}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}\right)\\&=\left(\frac{3}{4}\vec{a}\right)\cdot\left(\frac{3}{2}\vec{a}\right)-\left(\frac{3}{4}\vec{a}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{b}\right)+\left(\frac{1}{4}\vec{b}\right)\cdot\left(\frac{3}{2}\vec{a}\right)-\left(\frac{1}{4}\vec{b}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{b}\right)\\&=\frac{9}{8}\vec{a}\cdot\vec{a}-\frac{3}{8}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{3}{8}\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{1}{8}\vec{b}\cdot\vec{b}=\frac{9}{8}\left|\vec{a}\right|^2-\frac{1}{8}\left|\vec{b}\right|^2\\&=\frac{9}{8}\times1^2-\frac{1}{8}\times3^2=\frac{9}{8}-\frac{9}{8}=0\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\neq\vec{0}$、$\overrightarrow{\mathrm{OD}}\neq\vec{0}$より

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

したがって

$$\mathrm{OC}\perp\mathrm{OD}$$

インデックスに戻る