インデックスに戻る

１３．　平面ベクトル

１３－２．　ベクトルと平面図形

１３－２－３．　図形への応用

１３－２－３－１．同一直線上にある条件

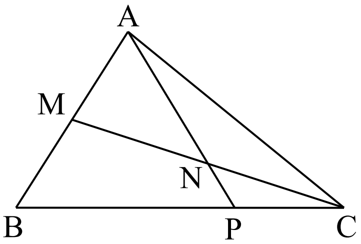
平面上の 3 点が同一直線上にあるための条件は、次のようになる。

平面上の 3 点が同一直線上にあるための条件

3 点 A 、 B 、 C が同一直線上にある

$\Leftrightarrow$　$\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ を満たす実数 k が存在する。

（例）



三角形 ABC において、辺 AB の中点を M 、線分 MC の中点を N 、辺 BC を $2:1$ に内分する点を P とする。3 点 A 、 N 、 P が同一直線上にあることを、ベクトルを用いて示そう。

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b}、\overrightarrow{AC} = \vec{c}$$

とする。

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{AN} = \frac{\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AC}}{2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\vec{b}\right) + \frac{1}{2}\vec{c} = \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} = \frac{1}{4}\left(\vec{b} + 2\vec{c}\right)$$

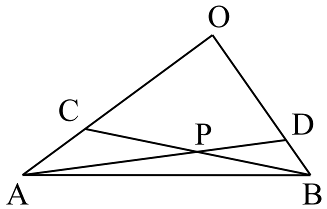
$$\overrightarrow{AP} = \frac{\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}}{2+1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c} = \frac{1}{3}\left(\vec{b} + 2\vec{c}\right)$$

よって、

$$\overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AP}$$

したがって、 A 、 N 、 P は同一直線上にある。

（例）



三角形OABにおいて、辺OAを$2:1$に内分する点をC、辺OBを$3:1$に内分する点をDとする。さらに、線分BCと線分ADの交点をPとする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$、$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$とするとき、$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$を$\vec{a}$、$\vec{b}$を用いて表そう。

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{2}{3}\vec{a}\text{、}\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{3}{4}\vec{b}$$

$\mathrm{BP}:\mathrm{PC}=s:(1-s)$とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+s\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{s+(1-s)}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+s\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

$$=(1-s)\vec{b}+s\left(\frac{2}{3}\vec{a}\right)=(1-s)\vec{b}+\frac{2}{3}s\vec{a}=\frac{2}{3}s\vec{a}+(1-s)\vec{b}$$

$\mathrm{AP}:\mathrm{PD}=t:(1-t)$とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{t+(1-t)}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

$$=(1-t)\vec{a}+t\left(\frac{3}{4}\vec{b}\right)=(1-t)\vec{a}+\frac{3}{4}t\vec{b}$$

$\vec{a}\neq\vec{0}$、$\vec{b}\neq\vec{0}$かつ、$\vec{a}$と$\vec{b}$は平行でないから、$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$を$\vec{a}$と$\vec{b}$を用いて表す表し方は一通りである。よって

$$\frac{2}{3}s=1-t\text{、}1-s=\frac{3}{4}t$$

この連立方程式を解くと

$$s=\frac{1}{2}\text{、}t=\frac{2}{3}$$

よって、

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$$

インデックスに戻る