インデックスに戻る

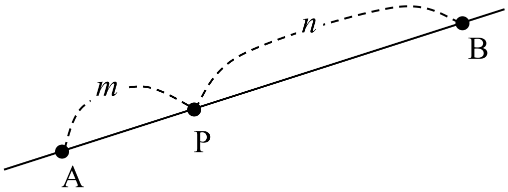
１３．　平面ベクトル

１３－２．　ベクトルと平面図形

１３－２－１．位置ベクトル

１３－２－１－２．分点の位置ベクトル

2 点 A$\left(\vec{a}\right)$、B$\left(\vec{b}\right)$について、線分 AB を $m:n$ に内分する点を P $\left(\vec{p}\right)$とする。$\vec{p}$ を $\vec{a}$ 、$\vec{b}$ で表すことを考えよう。



ベクトルの実数倍の定義により

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

よって

$$\vec{p} - \vec{a} = \frac{m}{m+n}\left(\vec{b} - \vec{a}\right)$$

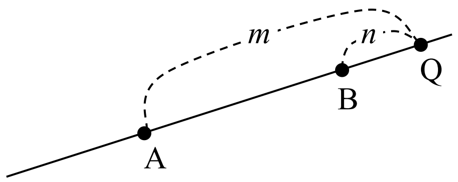
$$\vec{p} = \vec{a} + \frac{m}{m+n}\left(\vec{b} - \vec{a}\right)$$

$$\vec{p} = \left(1 - \frac{m}{m+n}\right)\vec{a} + \frac{m}{m+n}\vec{b}$$

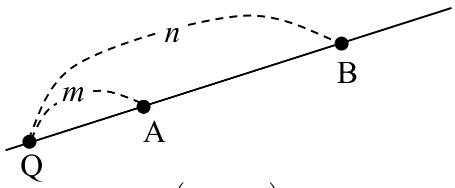
$$\vec{p} = \frac{n}{m+n}\vec{a} + \frac{m}{m+n}\vec{b}$$

$$\vec{p} = \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n}$$

次に、線分ABを$m:n$（$m \neq n$）に外分する点を$\mathrm{Q}\left(\vec{q}\right)$として、$\vec{q}$を$\vec{a}$、$\vec{b}$で表すことを考える。



（$m > n$）



（$m < n$）

ベクトルの実数倍の定義により

$m > n$のときは、$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \dfrac{m}{m-n}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$、$m < n$のときは、$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = -\dfrac{m}{n-m}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

が成り立つ。結局、どちらの場合も

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \frac{m}{m-n}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

よって

$$\vec{q} - \vec{a} = \frac{m}{m-n}\left(\vec{b} - \vec{a}\right)$$

$$\vec{q} = \vec{a} + \frac{m}{m-n}\left(\vec{b} - \vec{a}\right)$$

$$\vec{q} = \left(1 - \frac{m}{m-n}\right)\vec{a} + \frac{m}{m-n}\vec{b}$$

$$\vec{q} = \frac{-n}{m-n}\vec{a} + \frac{m}{m-n}\vec{b}$$

$$\vec{q} = \frac{-n\vec{a} + m\vec{b}}{m-n}$$

内分点、外分点の位置ベクトル

$A(\vec{a})$、$B(\vec{b})$とする。線分 AB を $m:n$ に内分する点の位置ベクトルは

$$\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$$

線分 AB を $m:n$ （$m \neq n$）に外分する点の位置ベクトルは

$$\frac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n}$$

（例）

$A(\vec{a})$、$B(\vec{b})$について、線分 AB を $5:3$ に内分する点を $C(\vec{c})$、$3:5$ に内分する点を $D(\vec{d})$、

$5:3$ に外分する点を $E(\vec{e})$、$3:5$ に外分する点を $F(\vec{f})$とすると、

$$\vec{c}=\frac{3\vec{a}+5\vec{b}}{5+3}=\frac{3\vec{a}+5\vec{b}}{8}=\frac{3}{8}\vec{a}+\frac{5}{8}\vec{b}$$

$$\vec{d}=\frac{5\vec{a}+3\vec{b}}{3+5}=\frac{5\vec{a}+3\vec{b}}{8}=\frac{5}{8}\vec{a}+\frac{3}{8}\vec{b}$$

$$\vec{e}=\frac{-3\vec{a}+5\vec{b}}{5-3}=\frac{-3\vec{a}+5\vec{b}}{2}=-\frac{3}{2}\vec{a}+\frac{5}{2}\vec{b}$$

$$\vec{f}=\frac{-5\vec{a}+3\vec{b}}{3-5}=\frac{-5\vec{a}+3\vec{b}}{-2}=\frac{5}{2}\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}$$

（注）

内分点・外分点の位置ベクトルの公式は、位置ベクトルの始点の取り方にはよらない。すなわち、位置ベクトルの始点をOとした場合の結論と、位置ベクトルの始点をO′にした場合の結論は同値である。例えば、内分点の公式において

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{n\overrightarrow{\mathrm{OA}} + m\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{m+n}$$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{\mathrm{O'P}} - \overrightarrow{\mathrm{O'O}} = \frac{n\left(\overrightarrow{\mathrm{O'A}} - \overrightarrow{\mathrm{O'O}}\right) + m\left(\overrightarrow{\mathrm{O'B}} - \overrightarrow{\mathrm{O'O}}\right)}{m+n}$$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{\mathrm{O'P}} - \overrightarrow{\mathrm{O'O}} = \frac{n\overrightarrow{\mathrm{O'A}} + m\overrightarrow{\mathrm{O'B}} - (m+n)\overrightarrow{\mathrm{O'O}}}{m+n}$$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{\mathrm{O'P}} - \overrightarrow{\mathrm{O'O}} = \frac{n\overrightarrow{\mathrm{O'A}} + m\overrightarrow{\mathrm{O'B}}}{m+n} - \overrightarrow{\mathrm{O'O}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{\mathrm{O'P}} = \frac{n\overrightarrow{\mathrm{O'A}} + m\overrightarrow{\mathrm{O'B}}}{m+n}$$

インデックスに戻る