

[インデックスに戻る](#)

1 3. 平面ベクトル

1 3-1. ベクトルの定義と演算

1 3-1-4. ベクトルの内積

1 3-1-4-4. 内積の性質

ベクトルの内積には、次の性質がある。

ベクトルの内積の性質

k は実数とする。

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

$$(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{b}) = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

(証明)

$\vec{a} = (a_1, a_2)$ 、 $\vec{b} = (b_1, b_2)$ 、 $\vec{c} = (c_1, c_2)$ とする。

$$\cdot \quad \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = (a_1, a_2) \cdot (a_1, a_2) = a_1^2 + a_2^2 = |\vec{a}|^2$$

$$\cdot \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

$$\vec{b} \cdot \vec{a} = (b_1, b_2) \cdot (a_1, a_2) = b_1 a_1 + b_2 a_2 = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

よって

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$\cdot \quad \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

$$\begin{aligned} & \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) \\ &= (a_1, a_2) \cdot \{(b_1, b_2) + (c_1, c_2)\} \\ &= (a_1, a_2) \cdot (b_1 + c_1, b_2 + c_2) \\ &= a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) \\ &= a_1b_1 + a_1c_1 + a_2b_2 + a_2c_2 \\ &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_1c_1 + a_2c_2 \\ &= (a_1b_1 + a_2b_2) + (a_1c_1 + a_2c_2) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \end{aligned}$$

$$\cdot \quad (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

$$\begin{aligned} & (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} \\ &= \{(a_1, a_2) + (b_1, b_2)\} \cdot (c_1, c_2) \\ &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \cdot (c_1, c_2) \\ &= (a_1 + b_1)c_1 + (a_2 + b_2)c_2 \\ &= a_1c_1 + b_1c_1 + a_2c_2 + b_2c_2 \\ &= a_1c_1 + a_2c_2 + b_1c_1 + b_2c_2 \\ &= (a_1c_1 + a_2c_2) + (b_1c_1 + b_2c_2) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} \end{aligned}$$

$$\cdot \quad (\vec{ka}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\vec{kb}) = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$\begin{aligned} & (\vec{ka}) \cdot \vec{b} \\ &= \{k(a_1, a_2)\} \cdot (b_1, b_2) \\ &= (ka_1, ka_2) \cdot (b_1, b_2) \\ &= ka_1 \times b_1 + ka_2 \times b_2 \\ &= ka_1 b_1 + ka_2 b_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \vec{a} \cdot (\vec{kb}) \\ &= (a_1, a_2) \cdot \{k(b_1, b_2)\} \\ &= (a_1, a_2) \cdot (kb_1, kb_2) \\ &= a_1 \times kb_1 + a_2 \times kb_2 \\ &= ka_1 b_1 + ka_2 b_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & k(\vec{a} \cdot \vec{b}) \\ &= k\{(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2)\} \\ &= k(a_1 b_1 + a_2 b_2) \\ &= ka_1 b_1 + ka_2 b_2 \end{aligned}$$

よって

$$(\vec{ka}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\vec{kb}) = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$k(\vec{a} \cdot \vec{b})$ を普通 $k\vec{a} \cdot \vec{b}$ と書く。これを $(\vec{ka}) \cdot \vec{b}$ と解釈しても、結果はかわらない。

(例)

$$\begin{aligned}
 & (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) \\
 &= \vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) + \vec{b} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) \\
 &= \vec{a} \cdot \{\vec{a} + (-\vec{b})\} + \vec{b} \cdot \{\vec{a} + (-\vec{b})\} \\
 &= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot (-\vec{b}) + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot (-\vec{b}) \\
 &= \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{b} \\
 &= |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 \\
 & \quad |\vec{a} + \vec{b}|^2 \\
 &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) \\
 &= \vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{b} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) \\
 &= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} \\
 &= |\vec{a}|^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\
 &= |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2
 \end{aligned}$$

(例)

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ について、次のことが成り立っているとする。

$$|\vec{a}| = \sqrt{3}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{5}, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 2$$

このときの、 $|\vec{a} - \vec{b}|$ を求めよう。

$$\begin{aligned} & |\vec{a} - \vec{b}|^2 \\ &= |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ &= 3 - 2 \times 2 + 5 \\ &= 3 - 4 + 5 \\ &= 4 \\ &|\vec{a} - \vec{b}| \geq 0 \text{ より} \\ &|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{4} = 2 \end{aligned}$$

[インデックスに戻る](#)