インデックスに戻る

１３．　平面ベクトル

１３－１．　ベクトルの定義と演算

１３－１－４．ベクトルの内積

１３－１－４－３．内積となす角

内積の定義と、内積と成分の関係から、次のことが成り立つ。

内積となす角

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ はともに $\vec{0}$ でないとする。$\vec{a}=(a_1,a_2)$、$\vec{b}=(b_1,b_2)$ とし、$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ（$0°\leq\theta\leq180°$）とすると

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2}\sqrt{{b_1}^2+{b_2}^2}}$$

（例）

$\vec{a}=(2,1)$、$\vec{b}=(-3,1)$ のとき、この 2 つのベクトルのなす角を θ（$0°\leq\theta\leq180°$）とすると

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times(-3)+1\times1=-5$$

$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$$

$$\left|\vec{b}\right|=\sqrt{(-3)^2+1^2}=\sqrt{10}$$

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}=\frac{-5}{\sqrt{5}\sqrt{10}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0°\leq\theta\leq180°$ より

$$\theta=135°$$

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトルのなす角が $90°$ であるとき､その 2 つのベクトルは垂直であるという。

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が垂直であるとき、記号で $\vec{a}\perp\vec{b}$ と表す。$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が垂直のとき、

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos 90°=0$$

であり、逆に、$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ について、$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ ならば $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は垂直である。

ベクトルの垂直条件

$\vec{a}\neq\vec{0}$、$\vec{b}\neq\vec{0}$、$\vec{a}=(a_1,a_2)$、$\vec{b}=(b_1,b_2)$ のとき

$$\vec{a}\perp\vec{b} \quad\Leftrightarrow\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

$$\vec{a}\perp\vec{b} \quad\Leftrightarrow\quad a_1b_1+a_2b_2=0$$

（例）

$\vec{a}=(3,2)$、$\vec{b}=(4,y)$ が垂直であるときの、実数 y の値を求めよう。

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times4+2\times y=12+2y$$

であり、$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ であるから

$$12+2y=0$$
$$y=-6$$

（例）

$\vec{0}$ でない $\vec{a}=\left(a_1, a_2\right)$ に対して、$\vec{b}=\left(-a_2, a_1\right)$、$\vec{c}=\left(a_2, -a_1\right)$ とすると

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1\times\left(-a_2\right)+a_2\times a_1=-a_1a_2+a_1a_2=0$$

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=a_1\times a_2-a_2\times a_1=a_1a_2-a_1a_2=0$$

であるから、

$\vec{a}\perp\vec{b}$、$\vec{a}\perp\vec{c}$

インデックスに戻る