インデックスに戻る

１３．　平面ベクトル
１３－１．　ベクトルの定義と演算
１３－１－４．ベクトルの内積
１３－１－４－２．成分と内積

$\vec{a}=(a_1,a_2)$、$\vec{b}=(b_1,b_2)$とし、$\vec{a}$と$\vec{b}$は平行でなく、ともに$\vec{0}$でないとする。このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}\text{、}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$$

を満たすように、三角形OABを作ることができる。$\vec{a}$と$\vec{b}$のなす角をθとすると

$$\angle\mathrm{AOB}=\theta$$

である。よって、余弦定理より

$$\mathrm{AB}^2=\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-2\times\mathrm{OA}\times\mathrm{OB}\times\cos\theta$$

さらに

$$\mathrm{AB}^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2=\left|\vec{b}-\vec{a}\right|^2=(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2$$

$$\mathrm{OA}^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2={a_1}^2+{a_2}^2$$

$$\mathrm{OB}^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2=\left|\vec{b}\right|^2={b_1}^2+{b_2}^2$$

$$\mathrm{OA}\times\mathrm{OB}\times\cos\theta=\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\cos\theta=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta=\vec{a}\cdot\vec{b}$$

であるから

$$(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2=\left({a_1}^2+{a_2}^2\right)+\left({b_1}^2+{b_2}^2\right)-2\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$$

$$\left({b_1}^2-2a_1b_1+{a_1}^2\right)+\left({b_2}^2-2a_2b_2+{a_2}^2\right)=\left({a_1}^2+{a_2}^2\right)+\left({b_1}^2+{b_2}^2\right)-2\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$$

$$2\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=2a_1b_1+2a_2b_2$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$$

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行であるとき、

$\vec{b}=k\vec{a}$ （k は実数）

$(b_1,b_2)=k(a_1,a_2)$
$(b_1,b_2)=(ka_1,ka_2)$
$b_1=ka_1$、$b_2=ka_2$

k の符号によって、以下のようになる。

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が同じ向きのとき、$k>0$ であり、

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|=|\vec{a}||k\vec{a}|=|\vec{a}||k||\vec{a}|=k|\vec{a}|^2=k({a_1}^2+{a_2}^2)$$

$$a_1b_1+a_2b_2=a_1\times ka_1+a_2\times ka_2=k({a_1}^2+{a_2}^2)$$

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が逆向きのとき、$k<0$ であり、

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}||\vec{b}|=-|\vec{a}||k\vec{a}|=-|\vec{a}||k||\vec{a}|=k|\vec{a}|^2=k({a_1}^2+{a_2}^2)$$

$$a_1b_1+a_2b_2=a_1\times ka_1+a_2\times ka_2=k({a_1}^2+{a_2}^2)$$

$\vec{a}=\vec{0}=(0,0)$ のとき

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$、$a_1b_1+a_2b_2=0\times b_1+0\times b_2=0$

$\vec{b}=\vec{0}=(0,0)$ のとき

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$、$a_1b_1+a_2b_2=a_1\times 0+a_2\times 0=0$

以上より、どんな場合についても

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$$

が成り立つ。

内積と成分の関係

$\vec{a}=(a_1,a_2)$、$\vec{b}=(b_1,b_2)$のとき

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$$

（例）

$\vec{a}=(1,3)$、$\vec{b}=(-5,2)$のとき

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times(-5)+3\times 2=-5+6=1$$

インデックスに戻る