インデックスに戻る

８．複素数と方程式

８－２．高次方程式

８－２－２．高次方程式の解法と性質

８－２－２－２．因数定理の利用

$P(x)$をxの多項式とする。因数定理を用いて、$P(x)$を因数分解できる場合を考える。ある実数kに対して$P(k)=0$が成り立つとする。因数定理により$P(x)$は$x-k$を因数にもつ。すなわち、多項式$Q(x)$を用いて

$$P(x)=(x-k)Q(x) \quad \cdots①$$

と表すことができる。$P(x)$と$Q(x)$の次数を比べると、$Q(x)$の方が 1 だけ小さい。方程式

$$P(x)=0$$

に①を用いると

$$(x-k)Q(x)=0$$

$$x-k=0 \quad \text{または} \quad Q(x)=0$$

$$x=k \quad \text{または} \quad Q(x)=0$$

$P(x)=0$の解の 1 つは$x=k$であり、残りの解は$Q(x)=0$の解である。

（例）

方程式

$$x^3-7x-6=0 \quad \cdots①$$

について考える。

$$P(x)=x^3-7x-6$$

とする。

$$P(-1)=-1+7-6=0$$

であるから、$P(x)$は$x+1$を因数にもつ。実際、多項式の除法などにより

$$P(x)=(x+1)(x^2-x-6)$$

である。さらに計算を進めれば

$$P(x)=(x+1)(x-3)(x+2)$$

であることがわかる。よって①を解くと、次のようになる。

$$(x+1)(x-3)(x+2)=0$$

$$x=-1,\ 3,\ -2$$

（例）

方程式

$$x^3 - x^2 - x - 2 = 0 \quad \cdots ②$$

を複素数の範囲で解くことを考える。

$$P(x) = x^3 - x^2 - x - 2$$

とする。

$$P(2) = 8 - 4 - 2 - 2 = 0$$

であるから、$P(x)$は$x-2$を因数にもつ。実際、多項式の除法などにより

$$P(x) = (x-2)(x^2 + x + 1)$$

である。よって、②を解くと、次のようになる。

$$(x-2)(x^2 + x + 1) = 0$$

$$x - 2 = 0 \quad \text{または} \quad x^2 + x + 1 = 0$$

$$x = 2 \quad \text{または} \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$$

（例）

方程式

$$x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = 0 \quad \cdots ③$$

を解くことを考える。

$$P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$$

とすると

$$P(1) = 1 - 1 - 7 + 1 + 6 = 0$$

であるから、$P(x)$ は $x-1$ を因数にもつ。多項式の除法などにより

$$P(x) = (x-1)(x^3 - 7x - 6)$$

であることがわかる。さらに、

$$Q(x) = x^3 - 7x - 6$$

とすると

$$Q(-1) = -1 + 7 - 6 = 0$$

であるから、$Q(x)$ は $x+1$ を因数にもつ。多項式の除法などにより

$$Q(x) = (x+1)(x^2 - x - 6)$$

であることが分かる。よって

$$P(x) = (x-1)(x+1)(x^2 - x - 6)$$

さらに、計算を進めると

$$P(x) = (x-1)(x+1)(x-3)(x+2)$$

よって③を解くと、次のようになる。

$$(x-1)(x+1)(x-3)(x+2) = 0$$

$$x = 1, -1, 3, -2$$

インデックスに戻る