インデックスに戻る

８．複素数と方程式

８－１．複素数と２次方程式

８－１－３．解と係数の関係

８－１－３－１．解と係数の関係

以下では、a、b、cを実数とする。

2 次方程式

$$ax^2+bx+c=0 \quad \cdots ①$$

の 2 つの解をα、βとすると（重解のときは$\alpha=\beta$）、$\alpha+\beta$、$\alpha\beta$は次のようになる。

$$\begin{aligned}
&\alpha+\beta \\
&=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\
&=\frac{-2b}{2a} \\
&=-\frac{b}{a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\alpha\beta \\
&=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\
&=\frac{(-b)^2-\left(\sqrt{b^2-4ac}\right)^2}{4a^2} \\
&=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} \\
&=\frac{4ac}{4a^2} \\
&=\frac{c}{a}
\end{aligned}$$

逆に、2 つの複素数α、βについて

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}、\alpha\beta=\frac{c}{a}$$

が成り立つならば

$$b=-a(\alpha+\beta)、c=a\alpha\beta$$

であるから、①は

$$ax^2-a(\alpha+\beta)x+a\alpha\beta=0$$

$a\neq 0$ より

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$$

$$(x-\alpha)(x-\beta)=0$$

$$x=\alpha,\beta$$

すなわち、①の解はα、βである。

以上より、次のことがいえる。

2 次方程式の解と係数の関係

2 次方程式$ax^2+bx+c=0$の解がα、β $\Leftrightarrow$ $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$、$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

（例）

2 次方程式$2x^2-3x+2=0$の 2 つの解をα、βとすると

$$\alpha+\beta=-\frac{-3}{2}=\frac{3}{2}、\alpha\beta=\frac{2}{2}=1$$

（例）

2 次方程式$x^2-x+1=0$の解をα、βとすると

$\alpha+\beta=1$、$\alpha\beta=1$

$\alpha^2+\beta^2$

$=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=1^2-2\cdot1$

$=-1$

$\alpha^3+\beta^3$

$=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=1^3-3\cdot1\cdot1$

$=1-3$

$=-2$

$(\alpha-\beta)^2$

$=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=1^2-4\cdot1$

$=-3$

（注）

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ において

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}、\beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

とすると

$$\alpha-\beta$$
$$=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}$$

したがって、判別式を D とすると

$$(\alpha-\beta)^2=\frac{b^2-4ac}{a^2}=\frac{D}{a^2}$$

であり、とくに、$a=1$ の場合

$$(\alpha-\beta)^2=D$$

が成り立つ。

インデックスに戻る