

[インデックスに戻る](#)

8. 複素数と方程式

8-1. 複素数と2次方程式

8-1-2. 2次方程式の解と判別式

8-1-2-2. 判別式

方程式の解のうち、実数であるものを実数解、虚数であるものを虚数解という。

実数を係数とする（ただし $a \neq 0$ ）2次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

の解は、

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

であったから、その種類は $b^2 - 4ac$ の符号によって定まる。

$$b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow \textcircled{1} \text{ は異なる 2 つの実数解をもつ}$$

$$b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow \textcircled{1} \text{ は重解をもつ}$$

$$b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow \textcircled{1} \text{ は異なる 2 つの虚数解をもつ}$$

$b^2 - 4ac = 0$ のときの重解は実数であり、 $b^2 - 4ac < 0$ のときの2つの虚数解は互いに共役である。

$b^2 - 4ac$ を2次方程式①の判別式といい、 D で表すことが多い。

2次方程式の解の種類の判別

$$D > 0 \Leftrightarrow \text{異なる 2 つの実数解をもつ}$$

$$D = 0 \Leftrightarrow \text{重解をもつ}$$

$$D < 0 \Leftrightarrow \text{異なる 2 つの虚数解をもつ}$$

a, b', c を実数とする（ $a \neq 0$ ）。2次方程式 $ax^2 + 2b'x + c = 0$ においては

$$D = (2b')^2 - 4ac = 4b'^2 - 4ac = 4(b'^2 - ac)$$

であるから、 $\frac{D}{4} = b'^2 - ac$ の符号で、解を判別することができる。

(例)

2次方程式 $x^2 + x - 1 = 0$ の判別式 D は $D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 5 > 0$ であるから、この2次方程式は異なる2つの実数解をもつ。

2次方程式 $x^2 + x + 1 = 0$ の判別式 D は $D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$ であるから、この2次方程式は異なる2つの虚数解をもつ。

2次方程式 $2x^2 + 4x + 3 = 0$ の判別式を D とすると $\frac{D}{4} = 2^2 - 2 \cdot 3 = -2 < 0$ であるから、この2次方程式は異なる2つの虚数解をもつ。

(例)

$x^2 + ax + 1 = 0$ が実数解をもつような実数 a の値の範囲を求める。

判別式を D とすると

$$D = a^2 - 4$$

である。この2次方程式が実数解をもつ条件は

$$D \geq 0$$

であるから

$$a^2 - 4 \geq 0$$

$$(a - 2)(a + 2) \geq 0$$

$$a \leq -2, 2 \leq a$$

[インデックスに戻る](#)