インデックスに戻る

８．複素数と方程式

８－１．複素数と２次方程式

８－１－１．複素数の定義と計算

８－１－１－２．複素数の計算

複素数どうしの四則演算（加法・減法・乗法・除法）を次のように定義する。複素数どうしの四則演算の結果（和・差・積・商）は、また複素数である。ただし、除法の分母は0でないとする。

複素数の四則演算

iを虚数単位とし、a、b、c、dを実数とする。

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$
$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$$
$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$
$$\frac{c+di}{a+bi}=\frac{ac+bd}{a^2+b^2}+\frac{ad-bc}{a^2+b^2}i \qquad \text{（ただし}(a,b)\neq(0,0)\text{）}$$

iを文字のように扱って計算を進め、$i^2=-1$に置き換えると、これらと同様の結果が得られる。ただし、除法の計算は、分母と分子に$a-bi$を掛けることによる。また、複素数αについて、$-\alpha$は$(-1)\alpha$を表すものとする。すなわち、$-(a+bi)=(-a)+(-b)i$である。

（例）

$$(1+5i)+(3+2i)=4+7i$$
$$(1+5i)-(3+2i)=-2+3i$$
$$(1+5i)(3+2i)=3+15i+2i+10i^2=3+17i+10i^2=3+17i-10=-7+17i$$
$$\frac{3+2i}{1+5i}=\frac{(3+2i)(1-5i)}{(1+5i)(1-5i)}=\frac{3-13i-10i^2}{1-25i^2}=\frac{3-13i+10}{1+25}=\frac{13-13i}{26}=\frac{1-i}{2}$$

a、bを実数とするとき、複素数$a+bi$と$a-bi$を互いに共役な複素数という。実数aと共役な複素数はa自身である。

α、β、γ、z を複素数とするとき、四則演算の定義により、次のことがいえる。

$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$　（加法の結合法則）

$\alpha+\beta=\beta+\alpha$　（加法の交換法則）

$\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma$　（乗法の結合法則）

$\alpha\beta=\beta\alpha$　（乗法の交換法則）

$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$、$(\alpha+\beta)\gamma=\alpha\gamma+\beta\gamma$　（分配法則）

$\alpha+0=0+\alpha=\alpha$

$\alpha\cdot 1=1\cdot\alpha=\alpha$

$\alpha+(-\alpha)=(-\alpha)+\alpha=0$

$\alpha\neq 0$ のとき　$\dfrac{1}{\alpha}\cdot\alpha=\alpha\cdot\dfrac{1}{\alpha}=1$

$\alpha\cdot 0=0\cdot\alpha=0$

$z+\alpha=\beta \quad\Rightarrow\quad z=\beta-\alpha$

$\alpha z=\beta$ かつ $\alpha\neq 0 \quad\Rightarrow\quad z=\dfrac{\beta}{\alpha}$

$\alpha\beta=0 \quad\Rightarrow\quad \alpha=0$ または $\beta=0$

虚数については、大小関係を考えない。

インデックスに戻る