インデックスに戻る

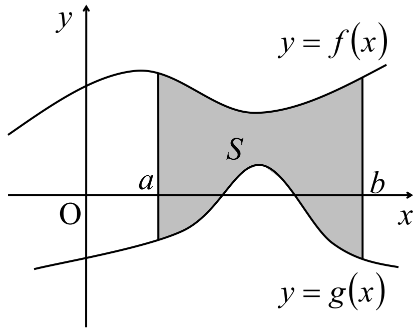
１２． 微分と積分

１２－３． 積分法

１２－３－３．定積分と面積

１２－３－３－２．２つの曲線に挟まれた部分の面積

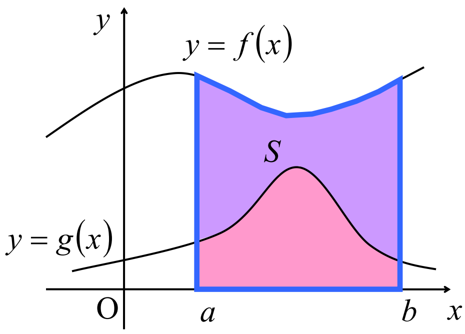
$y=f(x)$のグラフと$y=g(x)$のグラフとに挟まれた部分の面積について、次のことがいえる。



a、bは$a<b$を満たす実数とする。また、関数$f(x)$、$g(x)$は、$a\leq x\leq b$の範囲で$f(x)\geq g(x)$を満たすとする。このとき、$y=f(x)$のグラフ、$y=g(x)$のグラフ、直線$x=a$、直線$x=b$で囲まれた部分の面積をSとすると

$$S=\int_a^b\{f(x)-g(x)\}dx$$

（証明）



まず、$f(x)\geq 0$かつ$g(x)\geq 0$の場合を考える。
$y=f(x)$のグラフ、直線$x=a$、直線$x=b$、x軸で囲まれる部分の面積をT、$y=g(x)$のグラフ、直線$x=a$、直線$x=b$、x軸で囲まれる部分の面積をUとする。

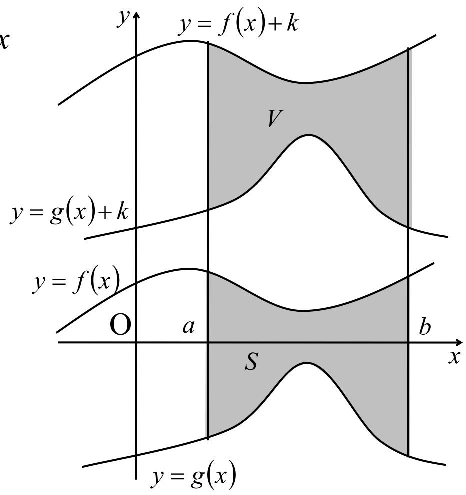
$$S=T-U$$

であり、

$$T=\int_a^b f(x)dx\text{、}U=\int_a^b g(x)dx$$

であるから

$$S=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx=\int_a^b\{f(x)-g(x)\}dx$$



次に、より一般の場合、すなわち「$f(x)\geq 0$かつ$g(x)\geq 0$」が必ずしも成り立たない場合について考える。
kを十分大きく（具体的には$g(x)$の最小値をmとするとき、$-m$より大きく）とると

$$f(x)+k\geq g(x)+k\geq 0$$

が成り立つ。直線$x=a$、直線$x=b$、$y=f(x)+k$のグラフ、$y=g(x)+k$のグラフとで囲まれる部分の面積をVとすると

$$S = V$$

であり、

$$V = \int_a^b \{(f(x)+k)-(g(x)+k)\}dx = \int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$$

よって

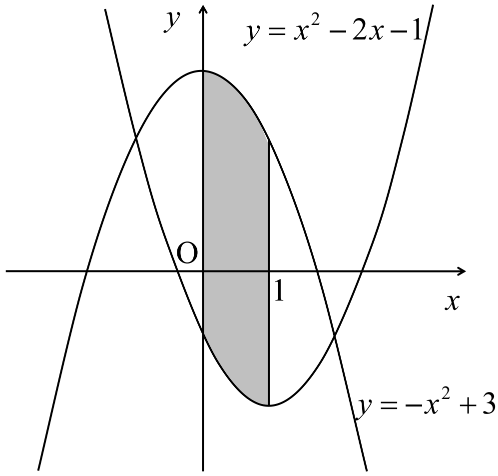
$$S = \int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$$

以上より、すべての場合について

$$S = \int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$$

（例）

$f(x)=-x^2+3$、$g(x)=x^2-2x-1$とする。直線$x=0$、$x=1$、$y=f(x)$、$y=g(x)$で囲まれる部分の面積Sを求めよう。$0 \le x \le 1$では$f(x) \ge g(x)$であるから



$$S = \int_0^1 \{(-x^2+3)-(x^2-2x-1)\}dx$$

$$= \int_0^1 (-2x^2+2x+4)dx$$

$$= \left[-\frac{2}{3}x^3+x^2+4x\right]_0^1$$

$$= \left(-\frac{2}{3}+1+4\right)-0 = \frac{13}{3}$$

インデックスに戻る