インデックスに戻る

１２． 微分と積分

１２－３． 積分法

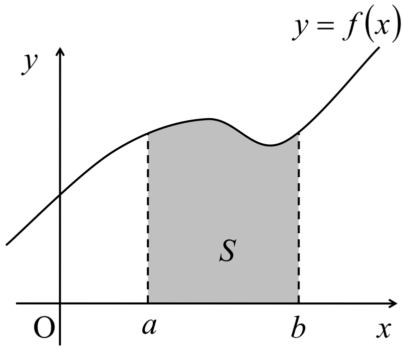
１２－３－３．定積分と面積

１２－３－３－１．定積分と面積の関係

定積分と面積の間には次の関係がある。

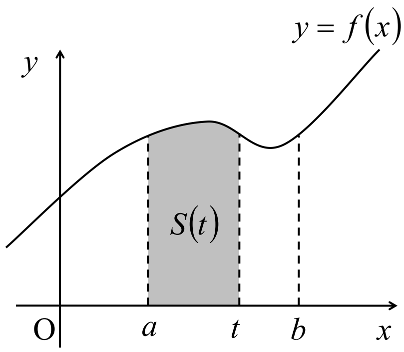
a、b は、$a<b$ を満たす実数とする。また、関数 $f(x)$ は $a \le x \le b$ の範囲で $f(x) \ge 0$ を満たすとする。このとき、$y=f(x)$ のグラフ、直線 $x=a$、直線 $x=b$、x 軸で囲まれた部分の面積を S とすると

$$S=\int_a^b f(x)dx$$



（証明）

$a \le t \le b$ とする。$y=f(x)$ のグラフ、直線 $x=a$、直線 $x=t$、x 軸で囲まれた部分の面積を $S(t)$ とする。

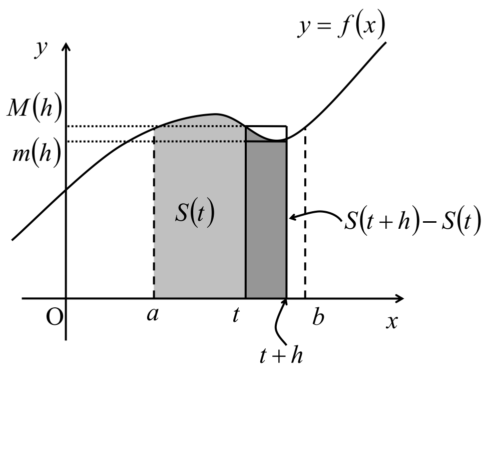


まず、$h>0$ とする。ただし、$t+h \le b$ とする。$S(t+h)-S(t)$ は $y=f(x)$ のグラフ、直線 $x=t$、直線 $x=t+h$、x 軸で囲まれた部分の面積に等しい。$f(x)$ の $t \le x \le t+h$ における最大値と最小値を、それぞれ $M(h)$、$m(h)$ とすると、幅が h、高さが $m(h)$、$M(h)$ の長方形を考えることにより

$$m(h)h \le S(t+h)-S(t) \le M(h)h$$

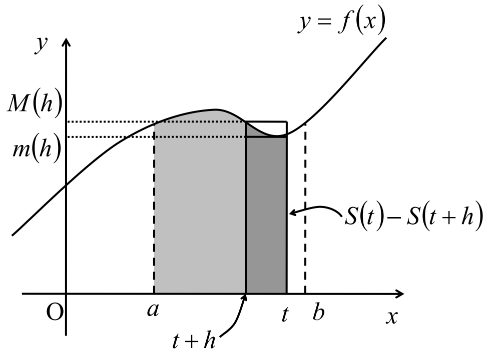
$h>0$ であるから

$$m(h) \le \frac{S(t+h)-S(t)}{h} \le M(h)$$



（証明の続き）

次に $h<0$ の場合を考える。ただし、$a \leq t+h$ とする。$S(t)-S(t+h)$ は $y=f(x)$ のグラフ、直線 $x=t$、直線 $x=t+h$、x 軸で囲まれた部分の面積に等しい。$f(x)$ の $t+h \leq x \leq t$ における最大値と最小値を、それぞれ $M(h)$、$m(h)$ とすると、幅が $|h|=-h$、高さが $m(h)$、$M(h)$ の長方形を考えることにより



$$m(h)(-h) \leq S(t)-S(t+h) \leq M(h)(-h)$$

$h<0$ より $-h>0$ であるから

$$m(h) \leq \frac{S(t)-S(t+h)}{-h} \leq M(h)$$

分母と分子を -1 倍することにより

$$\frac{S(t)-S(t+h)}{-h} = \frac{-S(t)+S(t+h)}{h}$$

$$\frac{S(t)-S(t+h)}{-h} = \frac{S(t+h)-S(t)}{h}$$

よって

$$m(h) \leq \frac{S(t+h)-S(t)}{h} \leq M(h)$$

したがって、$h>0$、$h<0$ のいずれの場合も

$$m(h) \leq \frac{S(t+h)-S(t)}{h} \leq M(h)$$

が成り立つ。さらに

$$\lim_{h\to 0} m(h) = f(t)、\lim_{h\to 0} M(h) = f(t)$$

であるから

$$\lim_{h\to 0} \frac{S(t+h)-S(t)}{h} = f(t)$$

すなわち

$$S'(t) = f(t)$$

が成り立つ。

（証明の続き）

よって、$S(t)$ は $f(t)$ の原始関数である。$f(t)$ の原始関数の一つを $F(t)$ とすると

$$S(t)=F(t)+C \qquad （C \text{は定数}）$$

である。$S(a)=0$ が成り立つから

$$S(a)=F(a)+C$$
$$0=F(a)+C$$
$$C=-F(a)$$

よって

$$S(t)=F(x)-F(a)$$

$y=f(x)$ のグラフ、直線 $x=a$、直線 $x=b$、x 軸で囲まれた部分の面積 S は

$$S=S(b)$$

であるから

$$S=S(b)=F(b)-F(a)$$

$F(t)$ は $f(t)$ の原始関数であったから

$$\int_a^b f(t)dt=\left[F(t)\right]_a^b=F(b)-F(a)$$

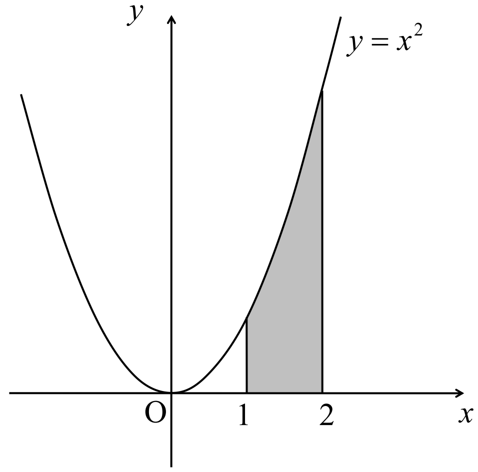
ゆえに

$$S=\int_a^b f(t)dt$$

（例）

$y=x^2$、直線 $x=1$、直線 $x=2$、x 軸囲まれた部分の面積は

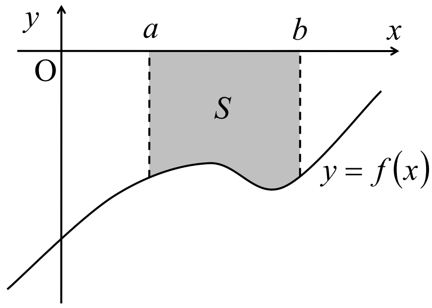
$$\int_1^2 x^2dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$$



$y=f(x)$のグラフと$y=-f(x)$のグラフはx軸に関して対称だから、次のことがいえる。

a、bは$a<b$を満たす実数とする。関数$f(x)$が$a\le x\le b$の範囲で$f(x)\le 0$を満たすとき、$y=f(x)$のグラフ、直線$x=a$、直線$x=b$、x軸で囲まれた部分の面積Sは

$$S=-\int_a^b f(x)dx$$



（証明）

$g(x)=-f(x)$とする。$y=g(x)$、直線$x=a$、直線$x=b$、x軸で囲まれた部分の面積をTとする。$g(x)$は$a\le x\le b$の範囲で$g(x)\ge 0$であるから

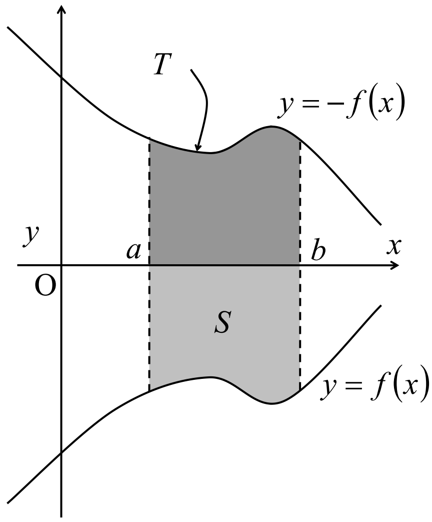
$$T=\int_a^b g(x)dx=\int_a^b(-f(x))dx=-\int_a^b f(x)dx$$

$y=f(x)$のグラフと$y=g(x)$のグラフはx軸に関して対称だから

$$S=T$$

よって

$$S=-\int_a^b f(x)dx$$



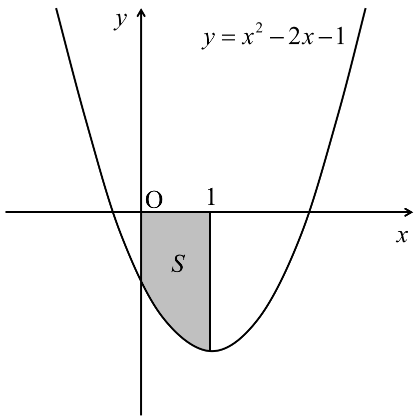
（例）

$f(x)=x^2-2x-1$とする。$0\le x\le 1$では、$f(x)<0$である。よって、$y=f(x)$のグラフ、y軸、直線$x=1$、x軸で囲まれた部分の面積Sは

$$S=-\int_0^1 f(x)dx=-\int_0^1(x^2-2x-1)dx$$

$$=-\left[\frac{1}{3}x^3-x^2-x\right]_0^1$$

$$=-\left\{\left(\frac{1}{3}-1-1\right)-0\right\}=\frac{5}{3}$$



インデックスに戻る