インデックスに戻る

１２． 微分と積分
１２－３． 積分法
１２－３－２．定積分
１２－３－２－３．定積分で表される関数

（例）

$$\int_0^1 t^2 dt = \left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\int_0^1 x^2 dt = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

上の、t や x を積分変数ということがある。
一般に、定積分において積分変数を別の文字に変えても、結果は同じであるし、積分変数以外の変数を含まない定積分は定数である。
一方で、積分変数以外に、積分変数とは無関係な変数が定積分に含まれる場合、その定積分は新たな関数を定める。

（例）

$$\int_0^1 (x+t)dt = \left[xt + \frac{1}{2}t^2\right]_0^1 = x + \frac{1}{2}$$

$$\int_0^x t^2 dt = \left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^x = \frac{1}{3}x^3$$

これらは x の関数とみなすことができる。

このような関数のうち、x とは無関係な t の関数 $f(t)$ を用いて、$\int_a^x f(t)dt$ の形の定積分で定められる x の関数について、次のことが成り立つ。

微分と積分の基本関係

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

（証明）

t の関数 $F(t)$ が $F'(t)=f(t)$ を満たすとすると、

$$\int_a^x f(t)dt=\left[F(t)\right]_a^x=F(x)-F(a)$$

$F(a)$ は定数であるから

$$\frac{d}{dx}\{F(a)\}=0$$

よって

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=\frac{d}{dx}\{F(x)-F(a)\}=F'(x)=f(x)$$

（例）

$$\frac{d}{dx}\int_1^x (3t^2+2t+1)dt=3x^2+2x+1$$

（参考）

$\int_1^x (3t^2+2t+1)dt$ を計算すると

$$\int_1^x (3t^2+2t+1)dt=\left[t^3+t^2+t\right]_1^x=x^3+x^2+x-3$$

この関数の導関数を求めると

$$(x^3+x^2+x-3)'=3x^2+2x+1$$

積分記号の中に書かれた関数が具体的な場合には、定積分を計算してから微分してもよい。

（例）

次の関係式を満たす関数 $f(x)$ と実数の定数 a の値を求めよう。

$$\int_a^x f(t)dt = x^2 - 2x + 1 \quad \cdots ①$$

①の両辺を x で微分すると

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = \frac{d}{dx}(x^2 - 2x + 1)$$

$$f(x) = 2x - 2$$

①に $x = a$ を代入すると

$$\int_a^a f(t)dt = a^2 - 2a + 1$$

$$0 = (a-1)^2$$

$$a = 1$$

よって

$f(x) = 2x - 2$ 、$a = 1$

インデックスに戻る