インデックスに戻る

１２． 微分と積分
１２－３． 積分法
１２－３－２．定積分
１２－３－２－２．定積分の性質

定積分には次の性質がある。

定積分の性質（定数倍・和・差の定積分）

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

（証明）

$F'(x)=f(x)$、$G'(x)=g(x)$とする。

$\{kF(x)\}' = kF'(x) = kf(x)$であるから

$$\int_a^b kf(x)dx = [kF(x)]_a^b = kF(b)-kF(a)$$

一方

$$k\int_a^b f(x)dx = k\{[F(x)]_a^b\} = k\{F(b)-F(a)\} = kF(b)-kF(a)$$

よって

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

（証明のつづき）

$\{F(x)+G(x)\}' = F'(x)+G'(x) = f(x)+g(x)$であるから

$$\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx = [F(x)+G(x)]_a^b = \{F(b)+G(b)\}-\{F(a)+G(a)\}$$

$$= \{F(b)-F(a)\}+\{G(b)-G(a)\} = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx = \int_a^b \{f(x)+(-g(x))\}dx$$

$$= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b (-g(x))dx$$

$$= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b (-1)g(x)dx$$

$$= \int_a^b f(x)dx + (-1)\int_a^b g(x)dx$$

$$= \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

（例）

$$\int_0^1 (x+k)^2 dx$$

$$= \int_0^1 (x^2+2kx+k^2)dx$$

$$= \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 2kx dx + \int_0^1 k^2 dx$$

$$= \int_0^1 x^2 dx + 2k\int_0^1 x dx + k^2\int_0^1 dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 + 2k\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 + k^2[x]_0^1$$

$$= \frac{1}{3} + 2k\cdot\frac{1}{2} + k^2\cdot 1$$

$$= \frac{1}{3} + k + k^2$$

定積分の上端と下端については、次の性質がある。

定積分の性質（上端と下端）

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

（証明）

・$\int_a^a f(x)dx = 0$、$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

関数 $F(x)$ は $F'(x) = f(x)$ を満たすとする。

$$\int_a^a f(x)dx = [F(x)]_a^a = F(a) - F(a) = 0$$

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \quad \cdots①$$

$$\int_b^a f(x)dx = [F(x)]_b^a = F(a) - F(b) = -\{F(b) - F(a)\} \quad \cdots②$$

①②より

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

・$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = [F(x)]_a^c + [F(x)]_c^b = \{F(c) - F(a)\} + \{F(b) - F(c)\}$$

$$= F(b) - F(a) \quad \cdots③$$

①③より

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

インデックスに戻る