

[インデックスに戻る](#)

1 2. 微分と積分

1 2-3. 積分法

1 2-3-1. 不定積分

1 2-3-1-2. 不定積分の計算

不定積分には次のような性質がある。

不定積分の性質

k を定数とする。関数 $f(x)$ 、 $g(x)$ について、次のことが成り立つ。

$F'(x) = f(x)$ 、 $G'(x) = g(x)$ を満たす関数 $F(x)$ 、 $G(x)$ について

$$\int kf(x)dx = kF(x) + C$$

$$\int (f(x) + g(x))dx = F(x) + G(x) + C$$

$$\int (f(x) - g(x))dx = F(x) - G(x) + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

(証明)

$$\cdot \int kf(x)dx = kF(x) + C$$

$$(kF(x))' = kF'(x) = kf(x)$$

よって、 $kF(x)$ は $kf(x)$ の原始関数である。ゆえに

$$\int kf(x)dx = kF(x) + C$$

$$\cdot \int (f(x) + g(x))dx = F(x) + G(x) + C$$

$$(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$$

よって、 $F(x) + G(x)$ は $f(x) + g(x)$ の原始関数である。ゆえに

$$\int (f(x) + g(x))dx = F(x) + G(x) + C$$

(証明のつづき)

$$\cdot \int (f(x) - g(x)) dx = F(x) - G(x) + C$$

$$(F(x) - G(x))' = F'(x) - G'(x) = f(x) - g(x)$$

よって、 $F(x) - G(x)$ は $f(x) - g(x)$ の原始関数である。ゆえに

$$\int (f(x) - g(x)) dx = F(x) - G(x) + C$$

この公式は不定積分を求めるのに便利である。

(例)

$$\begin{aligned} & \int (5x^2 + 3x + 4) dx \\ &= \int 5x^2 dx + \int 3x dx + \int 4 dx \\ &= 5 \int x^2 dx + 3 \int x dx + 4 \int dx \\ &= 5 \cdot \left(\frac{1}{3} x^3 \right) + 3 \cdot \left(\frac{1}{2} x^2 \right) + 4x + C \\ &= \frac{5}{3} x^3 + \frac{3}{2} x^2 + 4x + C \quad (C \text{ は積分定数}) \end{aligned}$$

変数が x 以外するときも同様である。

(例)

$$\int (t^2 + t + 1) dt = \frac{1}{3} t^3 + \frac{1}{2} t^2 + t + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

不定積分の応用として、次のようなものがある。

(例)

次の 2 つの条件を満たす $F(x)$ を求めよう。

$$(i) \quad F'(x) = 3x^2 \qquad (ii) \quad F(1) = 2$$

条件 (i) より

$$F(x) = \int 3x^2 dx = x^3 + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

これに、 $x = 1$ を代入すると

$$F(1) = 1^3 + C = 1 + C$$

よって、条件 (ii) より

$$1 + C = 2$$

$$C = 1$$

したがって

$$F(x) = x^3 + 1$$

[インデックスに戻る](#)