インデックスに戻る

１２． 微分と積分

１２－２． 関数の値の変化

１２－２－１．増減と極大・極小

１２－２－１－２．極大・極小

極大・極小と極小の定義は次のようになる。

関数 $f(x)$ が $x=a$ の前後で増加から減少に変わるとき、関数 $f(x)$ は $x=a$ で極大であるといい、 $f(x)$ が $x=a$ で極大であるときの $f(a)$ を極大値という。
関数 $f(x)$ が $x=a$ の前後で減少から増加に変わるとき、関数 $f(x)$ $x=a$ で極小であるといい、 $f(x)$ が $x=a$ で極小であるときの $f(a)$ を極小値という。
極大値と極小値をまとめて極値という。

関数のグラフを描くときには、増減表を書くとグラフの概形が捉えやすい。また、極値を求めるには、増減表を書いて増減を調べればよい。

（例）

関数 $f(x)=x^3-3x^2+1$ について調べる。導関数は

$$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$$

である。

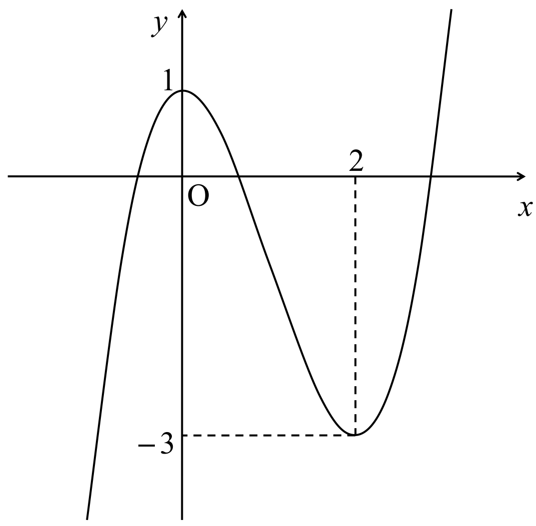
$$f(0)=1、f(2)=8-12+1=-3$$

増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	＋	0	−	0	＋
$f(x)$	↗		↘		↗

$f(x)$ は $x=0$ で極大で、極大値は $f(0)=1$、$f(x)$ は $x=2$ で極小で、極小値は $f(2)=-3$ である。

関数 $y=f(x)$ のグラフの概形は次のようになる。



（例）

$f(x)=-x^3$ について調べる。導関数は

$$f'(x)=-x^3$$

であるから、

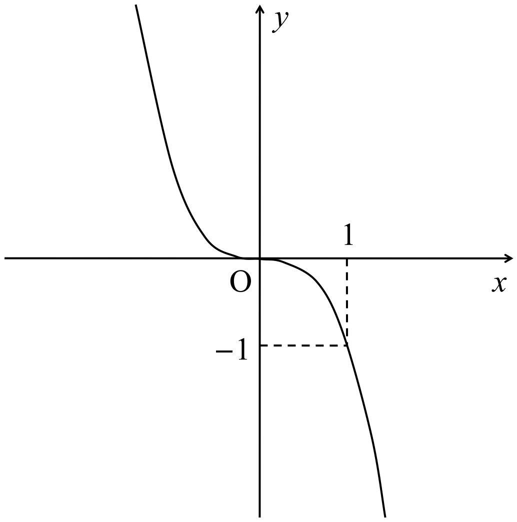
$$f'(x)\leq 0$$

である。増減表は次のようになる。

x		0	
$f'(x)$	$-$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$

$f(x)$ は常に減少するので、極値はない。

関数 $y=f(x)$ のグラフの概形は次のようになる。



関数 $f(x)$ が x の多項式で表される関数であれば、$f(x)$ が $x=a$ で極値をとるとき、$f'(a)=0$ であるが、逆はいえない。上の $f(x)=-x^3$ が反例である。$f'(0)=0$ であるのに、$f(x)$ は $x=0$ で極値をとらない。

（例）

関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ が $x=1$ で極小値 1 をとるという。この条件を満たす a 、b は存在するだろうか？

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

である。$f(x)$ が $x=1$ で極小値 1 をとると仮定すると

$f'(1)=0$ 、$f(1)=1$

よって

$3+2a+b=0$ 、$1+a+b=1$

この連立方程式を解くと

$a=-3$ 、$b=3$

よって

$f(x)=x^3-3x^2+3x$

$f'(x)=3x^2-6x+3=3(x^2-2x+1)=3(x-1)^2$

$f'(x)\geq 0$ で（かつ $f(x)=0$ を満たす x は $x=0$ のみで）あるから、$f(x)$ は常に増加する。これは最初の仮定と矛盾する。したがって、この条件を満たす a 、b は存在しない。

（例）

次の条件を満たす定数 a 、b の値を求めよう。

（＊）「関数 $f(x)=x^3-6ax^2+(12a^2-3)x+b$ が $x=1$ で極小値 -2 をとる。」

$f(x)$ の導関数を求めると

$f'(x)=3x^2-12ax+(12a^2-3)$

である。$f(x)$ が $x=1$ で極小値 -2 をとるから

$f'(1)=0$ …①、$f(1)=-2$ …②

①より

$3-12a+(12a^2-3)=0$

$12a^2-12a=0$

$a^2-a=0$

$a(a-1)=0$

$a=0,1$

②より

$1-6a+(12a^2-3)+b=-2$

$12a^2-6a+b=0$ …③

$a=0$ のとき、③より

$b=0$

$a=1$ のとき、③より

$12-6+b=0$

$6+b=0$

$b=-6$

よって

$a=0$ 、$b=0$ または $a=1$ 、$b=-6$

$f(x)=x^3-3x$ または $f(x)=x^3-6x^2+9x-6$

（ⅰ）

$f(x)=x^3-3x$ とすると

$f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$

増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

よって、$f(x)$ は $x=1$ で極小値 -2 をとる。

（ⅱ）

$f(x)=x^3-6x^2+9x-6$ とすると

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	-6	$\nearrow$

よって、$f(x)$ は $x=1$ で極大値 -2 をとる。

（ｉ）（ⅱ）より、条件（＊）を満たす a 、b の値は

$a=0$ 、$b=0$

インデックスに戻る