

[インデックスに戻る](#)

1 2. 微分と積分

1 2-2. 関数の値の変化

1 2-2-1. 増減と極大・極小

1 2-2-1-1. 関数の増減

関数のグラフと増減の関係について調べる。

グラフの接線が右上がりになっているような x の範囲では、その関数は増加。

グラフの接線が右下がりになっているような x の範囲では、その関数は減少。

(注)

関数 $y = f(x)$ がある x の範囲で増加するとは、その範囲で、 x が増加するとき y も増加する、すなわち、 x が大きいほど y も大きくなる、という意味である。また、関数 $y = f(x)$ がある x の範囲で減少するとは、その範囲で、 x が増加するとき y が減少する、すなわち、 x が大きいほど y は小さくなる、という意味である。

$x = a$ における接線の傾きは $f'(a)$ である。接線が右上がりのとき、接線の傾きは正、すなわち $f'(a) > 0$ である。接線が右下がりのとき、接線の傾きは負、すなわち $f'(a) < 0$ である。したがって、次のことがいえる。

関数の増減と導関数の値の符号

ある x の値の範囲で $f'(x) > 0$ ならば、その範囲で $f(x)$ は増加する。

ある x の値の範囲で $f'(x) < 0$ ならば、その範囲で $f(x)$ は減少する。

(注)

ある x の値の範囲で常に $f'(x) = 0$ ならば、その範囲で $f(x)$ は一定である。

(例)

関数 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ の増減を調べてみよう。導関数は

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3)$$

である。方程式 $f'(x) = 0$ を解くと

$$x = 1, 3$$

不等式 $f'(x) > 0$ を解くと

$$x < 1, 3 < x$$

不等式 $f'(x) < 0$ を解くと

$$1 < x < 3$$

したがって

$f(x)$ は $x < 1$ および $3 < x$ の範囲で増加し、 $1 < x < 3$ の範囲で減少する。これを表にまとめると、次のようになる。

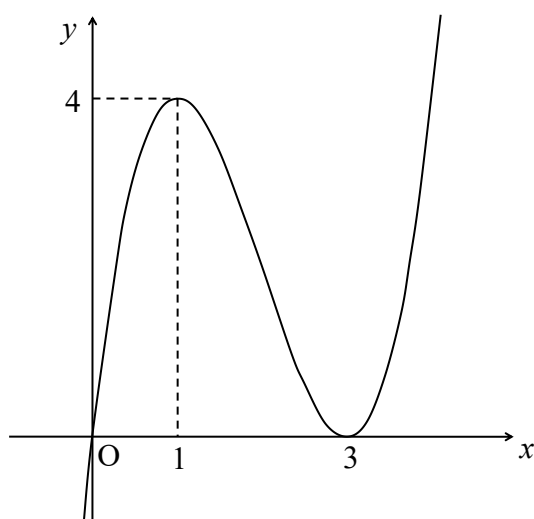
x	...	1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		4		0	

(注)

右上がりの矢印は増加を表し、右下がりの矢印は減少を表す。上のような表を増減表という。

(注)

この結果をもとに、関数 $y = f(x)$ のグラフを描くと次のようになる。



(例)

関数 $f(x) = x^3$ の増減を調べてみよう。

導関数を計算すると

$$f'(x) = 3x^2$$

したがって、すべての実数 x について

$$f'(x) \geq 0$$

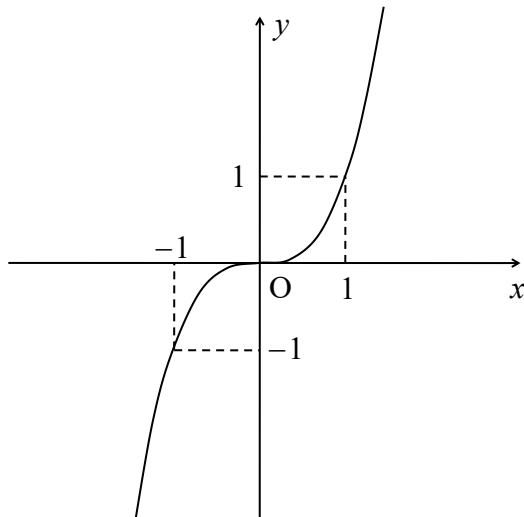
である。増減表は次のようになる。

x	...	0	...
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	↗		↗

$f'(0) = 0$ ではあるが、 $x < 0$ のとき $f'(x) > 0$ であるから $x \leq 0$ で増加、 $x > 0$ のとき $f'(x) > 0$ であるから $x \geq 0$ で増加、結局、実数全体で $f(x)$ は増加する（常に増加する）といえる。

(注)

グラフは次のようになる。



(例)

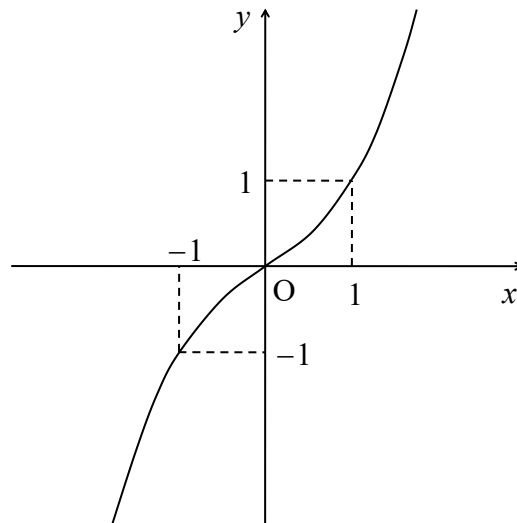
関数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x$ の増減を調べよう。導関数は

$$f'(x) = x^2 + \frac{2}{3}$$

であるから、すべての実数 x について $f'(x) > 0$ である。よって、 $f(x)$ は常に増加する。

(注)

グラフは次のようになる。



[インデックスに戻る](#)