インデックスに戻る

１２． 微分と積分

１２－１． 微分係数と導関数

１２－１－２． 導関数とその計算

１２－１－２－１．導関数

（例）

$f(x)=x^2+2x$ とする。この関数の $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ を求める。

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{(a+h)^2+2(a+h)\}-(a^2+2a)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{(a^2+2ah+h^2+2a+2h)-(a^2+2a)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{(2a+2)h+h^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}(2a+2+h)$$
$$=2a+2$$

よって

$$f'(a)=2a+2$$

である。$f'(1)$ を求めるのに、もう一度同様の計算をする必要はなく、上の式に $a=1$ を代入すればよい。

$$f'(1)=2+2=4$$

であり、

$$f'(2)=4+2=6、\ f'(3)=6+2=8$$

なども同様である。

上のように、a の値を定めると $f'(a)$ の値は一つに定まる。すなわち、$f'(a)$ は a の関数である。普通、文字を変えて、次のように定義する。
関数 $f(x)$ について、x の値 a に対して、$f'(a)$ を対応させる新たな関数を考え、これを $f(x)$ の導関数といい、記号で $f'(x)$ とかく。

導関数の定義

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

関数 $y=f(x)$ の導関数を表す記号として、$f'(x)$ のほかに次のようなものがある。

$$y'、\frac{dy}{dx}、\frac{df(x)}{dx}、\frac{df}{dx}(x)$$

具体的な関数を表すときに、関数 x^2+3x のように表現することがある。このときには、この関数の導関数を

$$\left(x^2+3x\right)'$$

のように表すことがある。

いくつかの関数の導関数について結果を書くと、次のようになる。

定数関数、x^n で表される関数の導関数

$$(c)'=0 \quad （c\text{ は定数}）、\left(x^n\right)'=nx^{n-1} \quad （n=1,2,3）$$

（証明）

・$(c)'=0$

$$\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}0$$

$$=0$$

よって

$$(c)'=0$$

（証明のつづき）

・$(x)' = 1$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}1$$

$$=1$$

よって

$$(x)' = 1$$

・$(x^2)' = 2x$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x^2+2xh+h^2)-x^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(2x+h)h}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(2x+h)$$

$$=2x$$

よって

$$(x^2)' = 2x$$

（証明のつづき）

・$\left(x^3\right)' = 3x^2$

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3\right) - x^3}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left(3x^2 + 3xh + h^2\right)h}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \left(3x^2 + 3xh + h^2\right)$$
$$= 3x^2$$

よって

$$\left(x^3\right)' = 3x^2$$

インデックスに戻る