インデックスに戻る

４．場合の数と確率

４－２．場合の数

４－２－４．二項定理

４－２－４－３．二項定理

$(a+b)^5$ の展開式を考える。積の交換法則を用ないようにして計算すると、次のようになる。

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & aaaaa & + & aaaab & + & aaaba & + & aaabb \\
+ & aabaa & + & aabab & + & aabba & + & aabbb \\
+ & abaaa & + & abaab & + & ababa & + & ababb \\
+ & abbaa & + & abbab & + & abbba & + & abbbb \\
+ & baaaa & + & baaab & + & baaba & + & baabb \\
+ & babaa & + & babab & + & babba & + & babbb \\
+ & bbaaa & + & bbaab & + & bbaba & + & bbabb \\
+ & bbbaa & + & bbbab & + & bbbba & + & bbbbb
\end{array}
$$

この式の項の数は、$2^5=32$ 個である。この項のうち、積の交換法則を用いると a^2b^3 になるものは

$aabbb$ 、$ababb$ 、$abbab$ 、$abbba$ 、$baabb$

$babab$ 、$babba$ 、$bbaab$ 、$bbaba$ 、$bbbaa$

の 10 個である。これは、a が 2 個、b が 3 個の並べ替えになっているので、この場合の数は

$${}_5\mathrm{C}_2={}_5\mathrm{C}_3=\frac{5!}{2!3!}$$

に等しい。以上のことから、$(a+b)^5$ の展開式における a^2b^3 の係数は ${}_5\mathrm{C}_3$ であることが分かる。

同様にして、$(a+b)^n$ の展開式における $a^{n-r}b^r$ の係数は ${}_n\mathrm{C}_r$ である。ただし、$a^0=b^0=1$、

${}_n\mathrm{C}_0={}_n\mathrm{C}_n=1$ である。

このことから、一般に、次の二項定理と呼ばれる定理が成り立つ。

［二項定理］

$$(a+b)^n={}_n\mathrm{C}_0a^n+{}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b+{}_n\mathrm{C}_2a^{n-2}b^2+\cdots$$

$$\cdots+{}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}ab^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_nb^n$$

（例）

$$(x-3)^5$$

$$={}_5\mathrm{C}_0 x^5 + {}_5\mathrm{C}_1 x^4 (-3) + {}_5\mathrm{C}_2 x^3 (-3)^2 + {}_5\mathrm{C}_3 x^2 (-3)^3 + {}_5\mathrm{C}_4 x (-3)^4 + {}_5\mathrm{C}_5 (-3)^5$$

$$= 1 \cdot x^5 + 5 \cdot x^4 \cdot (-3) + 10x^3 \cdot 9 + 10x^2 \cdot (-27) + 5x \cdot 81 + 1 \cdot (-243)$$

$$= x^4 - 15x^4 + 90x^3 - 270x^2 + 405x - 243$$

インデックスに戻る